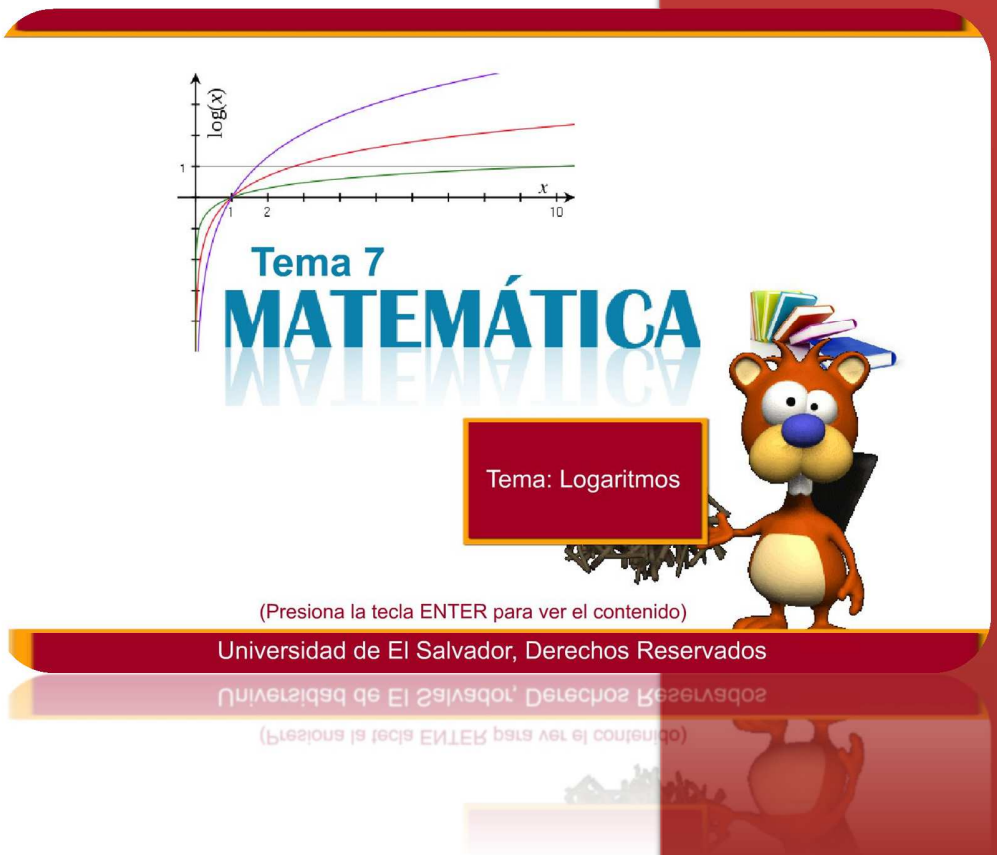
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Refuerzo para Aspirantes a Nuevo Ingreso

MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

LOGARITMOS 1
DEFINICIÓN 1
LOGARITMOS BASE 10 2
LOGARITMOS DE BASE *e* 3
PROPIEDADES 3
CAMBIO DE BASE. 4
ECUACIONES EXPONENCIALES 5
ECUACIONES LOGARÍTMICAS 7

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

LOGARITMOS

Los logaritmos son usados para modelar la respuesta que los humanos damos o estímulos, tales como: el sonido, la luz o la presión, por lo tanto su estudio es muy importante.

DEFINICIÓN

En La ecuación $x = a^y$, donde a es un número real positivo distinto de 1, $"y"$ recibe el nombre el logaritmo en base a de x , y se escribe

$$y = \log_a x$$

Por lo tanto, "El logaritmo de un número es el exponente, que indica la potencia, a la que hay que elevar la base para obtener el mismo número"

Ejemplo. Calcule:

1) $\log_2 8$

Solución

Para calcular el logaritmo del número ***8***, cuando la base es ***2*** Ud. Debe preguntarse ¿Cuál es el exponente al que debo elevar la base ***2*** para que resulte 8? Ya que ***2^3 = (2) (2) (2) = 8***
Su respuesta debe ser ***3***, es decir.

1) $\log_2 8$

Solución

$\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

2) $\log_3 9$

Solución

$\log_3 9 = 2$ ya que $3^2 = 9$

3) $\log_2 16$

Solución

$\log_2 16 = 4$ ya que $2^4 = 16$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

4) $\log_3 \frac{1}{81}$

Solución

$$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^4}\right)$$
$$= \log_3\left(3^{-4}\right)$$
$$= -4 \qquad \text{ya que} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

LOGARITMOS BASE 10

Los logaritmos de ***base 10*** se llaman ***logaritmos comunes.*** Se acostumbra escribir ***log x*** en lugar de ***log $_{10}$ x***.

Ejemplos calcule

1) $\log 10$

Solución

$\log 10 = \log_{10} 10 = 1, \qquad$ ya que $\quad 10^1 = 10$

2) $\log 100$

Solución

$\log 100 = \log_{10} 100 = 2, \qquad$ ya que $\quad 10^2 = 100$

3) $\log 0.001$

Solución

$\log 0.001 = \log_{10} 0.001 = \log_{10}\left(10^{-3}\right) = -3, \qquad$ ya que $\quad 10^{-3} = 0.001$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

LOGARITMOS DE BASE e

Los logaritmos de base ***e*** se llaman ***logaritmos naturales*** se acostumbra escribir $\ln x$ en lugar de $\log_e x$. El número ***e*** es número irracional cuyo valor aproximado es ***2.7182818.***

El número ***e*** es utilizado en: cálculos financieros, problemas que implican crecimiento o extinción de especies naturales, cálculo de rapidez de reacciones químicas o rapidez de enfriamiento de un cuerpo, cálculos relacionados con los cambios de la presión atmosférica con la altura, etc.

PROPIEDADES

Sea ***a*** un número real positivo distinto de uno. Sea ***M, N y C*** números reales cualesquiera con ***M y N*** positivos.

1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

3) $\log_a\left(M^C\right) = C\ \log_a M$

4) $\log_a 1 = 0$

5) $\log_a a = 1$

6) $\log_a\left(a^C\right) = C$

7) $a^{\log_a M} = M$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

Ejemplo. Deduzca la propiedad 2).

Desarrollo:

$M = a^x \rightarrow x = \log_a M \quad (1)$

$N = a^y \rightarrow y = \log_a \mathrm{N} \quad (2)$

$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y}$

$\frac{M}{N} = a^{x-y} \rightarrow x - y = \log_a \left(\frac{M}{N}\right) \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) en (3)

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right) \Rightarrow \boxed{\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N}$$

Ejercicio. Deduzca las otras propiedades

Ejercicio. Escriba con sus propias palabras las propiedades anteriores, por ejemplo, la propiedad 1): ***El logaritmo del producto de dos números positivo es igual a la suma de los logaritmos de los números.***

CAMBIO DE BASE.

$M = a^x \rightarrow x = \log_a M \quad (1)$

$N = b^y \rightarrow y = \log_b \mathrm{M} \quad (2)$

$x = \log_a (M)$

$x = \log_a (b^y)$

$x = y \log_a b \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) en (3)

$\log_a M = (\log_b M)(\log_a b)$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

ECUACIONES EXPONENCIALES

Su calculadora solo tiene las teclas $\log$ para $\log_{10} M$ y $\ln$ para $\log_{\ell} M$

Utilizará su calculadora para calcular logaritmos de números de cualquier base, siempre que la base sea positiva y diferente de uno, así:

Ejemplo. Calcule

1) $\log_4 64$

Solución

$$\log_4 64 = \frac{\log 64}{\log 4} = 3 \quad \text{ó}$$

$$\log_4 64 = \frac{\ln 64}{\ln 4} = 3$$

2) $\log_3 100$

Solución

$$\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = 4.191806549 \quad \text{ó}$$

$$\log_3 100 = \frac{\ln 100}{\ln 3} = 4.191806549$$

Ejercicios.

Calcule el conjunto solución de:

1) $9^{2x-7} = 27^{x-3}$

$(3^2)^{2x-7} = (3^3)^{x-3}$

$(3)^{2(2x-7)} = (3)^{3(x-3)}$

como las bases son iguales, entonces

$2(2x-7) = 3(x-3)$

$4x-14 = 3x-9$

$4x-3x = 14-9$

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad S = \{5\}$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

b) Otro método

$$9^{2x-7} = 27^{x-3}$$
$$2x-7 = \log_9(27)^{x-3}$$
$$2x-7 = (x-3)\log_9(27) \quad \text{pero } 27 = (\sqrt{9})^3 = 3^{3/2}$$
$$2x-7 = (x-3)\log_9(9)^{3/2}$$
$$2x-7 = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{9}{2}$$
$$2x-\tfrac{3}{2}x = 7-\tfrac{9}{2}$$
$$2(2x-\tfrac{3}{2}x) = 2(7-\tfrac{9}{2})$$
$$4x-3x = 14-9 \quad \Rightarrow x=5 \quad \Rightarrow \text{S}=\{5\}$$

c) Otro forma

$$9^{2x-7} = 27^{x-3}$$
$$\log 9^{2x-7} = \log 27^{x-3}$$
$$(2x-7)\log 9 = (x-3)\log 27$$
$$2x\log 9 - 7\log 9 = x\log 27 - 3\log 27$$
$$2x\log 9 - x\log 27 = 7\log 9 - 3\log 27$$
$$x(2\log 9 - \log 27) = 7\log 9 - 3\log 27$$
$$x = \frac{7\log 9 - 3\log 27}{2\log 9 - \log 27}$$
$$x=5 \quad \Rightarrow \text{S}=\{5\}$$

2) $2\log x + \log x = 6$

Solución:

$$2\log x + \log x = 6$$
$$(2+1)\log x = 6$$
$$3\log x = 6$$
$$\log x = \frac{6}{3}$$
$$\log x = 2$$
$$x = 10^2$$
$$x = 100 \quad \Rightarrow \text{S}=\{100\}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1) $\log(3x+21)-\log(2x+1)=\log 8$

Solución:

si $(3x+21)$ y $(2x+1)$ son números positivos.

$\log(3x+21)-\log(2x+1)=\log 8$

$\log\left(\frac{3x+21}{2x+1}\right)=10^{\log 8}$

$\frac{3x+21}{2x+1}=8$

$3x+21=8(2x+1)$

$3x+21=16x+8$

$3x-16x=8-21$

$-13x=-13;\quad x=\frac{-13}{-13}$

$x=1$ S=$\{1\}$

2) $3^{2x}-3^{x}-6=0$

Solución:

$3^{2x}-3^{x}-6=0$

$(3^{x})^{2}-(3^{x})-6=0$

$(3^{x}-3)(3^{x}+2)=0$

$3^{x}-3=0 \quad\Rightarrow\quad 3^{x}=3 \quad\Rightarrow\quad x=\log_3 3=1$

$3^{x}+2=0 \quad\Rightarrow\quad 3^{x}=-2 \quad\Leftarrow$ ¡Absurdo!

S=$\{1\}$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

3) $(\ln 10)(\log(x+2))+\ln(x-1)=\ln 10$

Solución:

si $(x+2)$ y $(x-1)$ son positivos

$(\ln 10)(\log(x+2))+\ln(x-1)=\ln 10$

$(\ln 10)\left(\frac{\ln(x+2)}{\ln 10}\right)+\ln(x-1)=\ln 10$

$\ln(x+2)+\ln(x-1)=\ln 10$

$\ln\left[(x+2)(x-1)\right]=\ln 10$

$(x+2)(x-1)=\ell^{\ln 10}$

$(x+2)(x-1)=10$

$x^2+x-2=10$

$x^2+x-2-10=0$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4 \quad \Leftarrow$ ¡Absurdo!

$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

$S=\{3\}$

Si $x=4$ se sustituye en:

x+2 $\Rightarrow$ -4+2=-2 y

log(-2) ¡No existe en $\mathbb{R}$!

Por lo tanto

$x=-4$ no es parte del conjunto solución

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados